Calcul matriciel

C. Dillmann

24 mars 2021

Ce petit mémento sur le calcul matriciel est très fortement inspiré de la page web https://www.unilim.fr/pages_perso/jean.debord/math/matrices/matrices.htm réalisée par Jean Debord, de la Faculté de médecine de Limoges.

1 Définitions

Une matrice $n \times m$ est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes. Exemple avec $n = 2$, $m = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

n et m sont les dimensions de la matrice. Par convention, on appelle a_{ij} l'élément de la matrice A correspondant à la ligne i et la colonne$j$. On peut aussi écrire :

$$A = [a_{ij}]_{n \times m}$$

Matrices particulières

Si $m = 1$, la matrice est appelée vecteur colonne:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Si $n = 1$, la matrice est appelée vecteur ligne et correspond à la *transposée* du vecteur colonne $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

Si $n = m$, la matrice est carrée. Il existe des matrices carrées particulières, qui peuvent être créés grâce à des fonctions R.

Une *matrice diagonale* est une matrice carrée pour laquelle tous les éléments hors-diagonaux sont nuls :

```
diag(c(3,6,7))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3    0    0
## [2,]    0    6    0
## [3,]    0    0    7
```

Une *matrice identité*, notée I_n est une matrice diagonale $n \times n$ pour laquelle tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 :

```
diag(nrow=4)
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    0    0    0
## [2,]    0    1    0    0
## [3,]    0    0    1    0
## [4,]    0    0    0    1
```

Une matrice carrée est dite *symmétrique* si pour tout $i \neq j$, $a_{ij} = a_{ji}$.

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2 Opérations sur les matrices

Les opérations sur les matrices sont codifiées et doivent être connues.

2.1 Addition, soustraction

L'addition et la soustraction des matrices se font terme à terme. Les matrices doivent avoir les mêmes dimension.

$$A - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2 Multiplication par un nombre

Chaque terme de la matrice est multiplié par le nombre :

$$2 \times A = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

2.3 Transposée

La transposée A^T (aussi notée A') d'une matrice A est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A

$$A' = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

La transposée d'un vecteur colonne $(n \times 1)$ est un vecteur ligne $(1 \times n)$.

2.4 Produit matriciel

Le *produit scalaire* d'un vecteur ligne $\mathbf{x}^T_{1\times m}$ par un vecteur colonne $\mathbf{y}_{m\times 1}$ est le nombre obtenu en faisant la somme du produit terme à terme de chaque élément des deux vecteurs :

$$\mathbf{x}^T \times \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} x_i \times y_i$$

Le produit scalaire ne peut se calculer qu'entre des vecteurs de même dimension.

Le *produit* de deux matrices ne peut se calculer que si le nombre de colonnes de la matrice de gauche est égal au nombre de lignes de la matrice de droite. Le produit de la matrice $A_{n\times m}$ par la matrice $B_{m\times p}$ est une matrice C de dimensions $n \times p$, telle que l'élément c_{ij} est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice A par la colonne j de la matrice B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \times b_{kj}$$

Par exemple :

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\\ 7 & 3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 8 & 11 & 10\\ 13 & 28 & 37 & 26\\ 13 & 34 & 44 & 26\end{bmatrix}$$

Dans cet exemple, $c_{11} = 1 + 2 \times 2 = 5$, et $c_{12} = 1 \times 4 + 2 \times 2 = 8$.

Le produit matriciel est

- *Associatif* : $A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- *Distributif* : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- *Non commutatif* : En général, $A \times B \neq B \times A$

La matrice unité est un élément neutre pour la multiplication :

$$A_{n\times m} \times I_m = I_n \times A_{n\times m} = A$$

La transposée d'un produit n'est pas égale au produit des transposées :

$$(A \times B)' = B' \times A'$$

L'ordre du produit change.

Sous R, l'opérateur pour le produit matriciel est $\% * \%$:

```
A <- matrix(c(1,2,5,4,7,3),ncol=2,byrow=TRUE)
B <- matrix(c(1,4,5,2,2,2,3,4),ncol=4,byrow=TRUE)
A%*%B
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    5    8   11   10
## [2,]   13   28   37   26
## [3,]   13   34   44   26
```

Il existe des produits paticuliers. Si $\mathbf{x}_{n\times 1}$ est un vecteur colonne, et $A_{n\times n}$ une matrice carrée symmétrique, alors

- La racine carrée du produit scalaire

$$\mathbf{x}' \times \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

est appelée la *norme du vecteur*. $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x}' \times \mathbf{x}}$.

- Attention, le produit $\mathbf{x} \times \mathbf{x}'$ est une matrice carrée symmétrique de dimensions $n \times n$ qui contient sur la diagonale des termes x_i^2, et pour les éléments hors-diagonaux, le produit $x_i \times x_j$.

- Le produit $\mathbf{x}' \times A \times \mathbf{x}$ est appelé *forme quadratique*.

Exercice. *On pose* $x = [2, 4, 3]$ *et* $A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 2 & 7\\ 5 & 7 & 2\end{bmatrix}$. *Calculer la norme du vecteur* $\boldsymbol{x}$ *et la forme quadratique. Ecrivez la matrice* $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}'$ *et donnez ses dimensions.*

2.5 Géométrie euclidienne

Un vecteur colonne $\mathbf{x}_{n\times 1}$ représente les coordonnées d'un point dans un espace euclidien orthonormé de dimension n. La norme du vecteur représente la distance entre l'origine de la base orthonormée et le point.

3 Systèmes d'équations linéaires

Un système de n équations à n inconnues peut s'écrire sous une forme matricielle. Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés du produit matriciel, ce système s'écrit $A \times \mathbf{x} = b$ où $A = [a_{ij}]_{3,3}$ est une matrice carrée, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ est un vecteur colonne (3×1) et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ est le vecteur colonne contenant les membres de gauche du système.

Exercice. *Ecrivez la matrice A et vérifiez que le produit $A \times \boldsymbol{x}$ est un vecteur colonne dont vous calculerez les éléments.*

4 Propriétés des matrices carrées

Les matrices carrées jouent un rôle important en algèbre linéaire. Nous en avons déjà vu plusieurs types :

- La matrice $\mathbf{x} \times \mathbf{x}'$ décrivant certaines propriétés d'un vecteur colonne. Cette matrice est symmétrique.
- La matrice A décrivant les coefficients linéaires d'un système d'équation.
- A noter que quelle que soit la dimension d'une matrice $B_{n\times m}$, la matrice $C = B' \times B$ est une matrice carrée symmétrique de dimension $m \times m$

4.1 Inversion d'un matrice carrée

Une matrice carrée $A_{m\times m}$ est dite *inversible* ou *régulière* s'il existe une matrice carrée A^{-1} (appelée *matrice inverse*) telle que :

$$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_m$$

Si A^{-1} n'existe pas, la matrice est dite singulière.

Propriétés :

- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- $(A')^{-1} = (A^{-1})'$
- $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$ (attention au changement d'ordre !)
- $Diag(D_{ii})^{-1} = 1/Diag(D_{ii})$

4.2 Déterminant d'une matrice carrée

Pour une matrice 2×2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, la matrice inverse vaut :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

où le nombre $ad - bc$ est appelé *déterminant* de la matrice A et noté $det(A)$.

On peut montrer que, quelle que soit la dimension d'une matrice carrée A, la matrice inverse A^{-1} n'existe que si $det(A) \neq 0$. Si $det(A) = 0$, la matrice A est dite *singulière*. Son inverse n'existe pas.

Propriétés des déterminants :

- $det(A') = det(A)$
- $det(A \times B) = det(A) \times det(B)$
- Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est le produit de ses éléments diagonaux. En particulier, $det(I_m) = 1$.

4.3 Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Deux matrices ayant une même trace se ressemblent.

4.4 Résolution d'un système d'équations linéaires

La résolution du système d'équations linéaires $A \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dépend des caractéristiques de la matrice A :

4.4.1 Si A_m est régulière ou inversible

On peut multiplier chaque membre de l'équation par A^{-1} :

$$A^{-1} \times A \times \mathbf{x} = A^{-1} \times \mathbf{b}$$

En utilisant les propriétés énnoncées ci-dessus ($A^{-1} \times A = I_m$ et $I_m \times \mathbf{x} = \mathbf{x}$), on trouve

$$\mathbf{x} = A^{-1} \times \mathbf{b}$$

4.4.2 Si A_m est de rang $r < m$

Cette situation se produit lorsque p équations du système sont en réalité combinaison linéaires des autres. Par exemple, dans le système suivant ($n = 3$) :

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = & 10 \\ 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 & = & 15 \end{array}$$

on trouve $p = 2$ équations combinaisons linéaires de la première. Il n'y a en réalité qu'une seule équation pour laquelle une infinité de solutions sont possibles. L'équation $x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$ définit une courbe (dimension 1) dans l'espace de dimension 3 engendré par la combinaison (x_1, x_2, x_3). Le nombre $r = n - p = 1$ est appelé le *rang de la matrice*. Le système d'équations est appelé *système indéterminé*. On peut choisir comme solution le point de la courbe correspondant à la distance la plus faible à l'origine, c'est à dire le vecteur $\mathbf{x}$ qui satisfait la contrainte $x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$ et qui a la plus faible norme.

4.4.3 Système impossible

Si les équations ne peuvent pas être exprimées les unes en fonction des autres, le système n'admet aucune solution. On peut cependant calculer un vecteur $\mathbf{x}$ tel que la norme du vecteur $A \times \mathbf{x} - \mathbf{b}$ soit minimale (bien que non nulle). Ce vecteur constitue la meilleure approximation de la solution au sens des moindres carrés.

Exercice. *On considère le système suivant*

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 3 \\ x_1 + x_2 & = & 4 \end{array}$$

Interprétez les résultats du script R et de la sortie graphique.

```r
A <- matrix(c(1,1,1,1),ncol=2,byrow=TRUE)
b <-c(3,4)
n <- 100
x1 <- seq(-3,3,length=n)
x2 <- seq(2,7,length=n)
res <- NULL
for (i in 1:n){
  for (j in 1:n){
    z <- A%*%c(x1[i],x2[j]) - b
    dist <- sqrt(t(z)%*%z)
    res <- rbind.data.frame(res,cbind.data.frame(x1=x1[i],x2=x2[j],dist=dist))
  }
}
mycols <- res$dist
mycols[mycols>1] <- 1
plot(res$x1,res$x2,type="p",pch=19,col=grey(mycols),
     xlab="x1", ylab="x2")
points(res$x1, 4-res$x1,type="l", lwd=2,col=2)
points(res$x1, 3-res$x1,type = "l", lwd=2,col=2)
```