Equations différentielles ordinaires

Christine Dillmann, Camille Noûs
christine.dillmann@universite-paris-saclay.fr, https://www.cogitamus.fr/
September 4, 2022

Ce cours a pour objectifs de faire quelques rappels sur les fonctions et sur l'étude de systèmes dynamiques, décrits par des équations différentielles ordinaires. Il s'appuie sur le document plus complet intitulé *Eléments d'algèbre et équations différentielles en biologie* (Dillmann et Graczyk, 2013). Cette version courte est inspirée du cours *Modèles dynamiques en Biologie* de la Licence de Biologie de l'Université Paris-Saclay. Merci à Nathalie Castelle, Elodie Marchadier, et toute l"équipe pédagogique! Il est également inspiré du cours sur les équations différentielles de Joaquin Moreno réalisé dans le cadre du programme intensif européen Erasmus *Mathematics and Biology* (2005-2010).

Ce document sert d'appui aux deux séances dont le déroulé est détaillé en Annexe A. Il sagit d'un cours intégré, basé sur l'étude d'exemples. Les exercices sont a faire sur feuille, avec un papier et un crayon ou en utilisant le logiciel R pour faire des représentations graphiques.

A l'issue du cours, vous pouvez vous entraîner sur l'étude d'un cas plus complexe, qui est un modèle simplifié de la dynamique des maladies à prion qui touchent l'homme ou les animaux d'élevage. Ce modèle est détaillé dans le document `prion_2010.pdf`.

L'ensemble des documents du cours sont accessibles sur le lien suivant :
`https://cirrus.universite-paris-saclay.fr/s/wmoDDW2wtp9rdzi`

Table des matières

1 Fonctions mathématiques

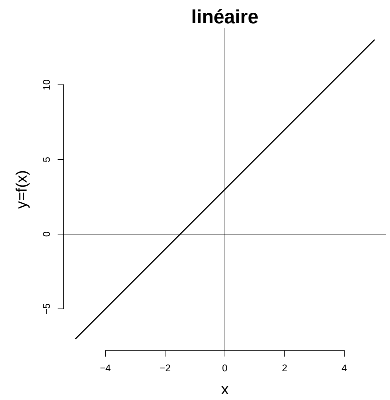
1.1 Equations, fonctions

Considérons une inconnue y. $2y - 4 = 0$ est une équation dont la solution est un nombre ($y = 2$). Par contre, $2y - 4t = 5$ est une équation dont la solution est une *fonction* du temps t. Toutes les valeurs de y qui satisfont l'équation sont des solutions. Ces valeurs se trouvent sur la droite d'équation $y = f(t) = 5/2 + 2t$ d'ordonnée à l'origine 5/2 et de pente 2.
En mathématiques, une fonction est une relation entre un ensemble d'entrées (antécédent) et un ensemble de sorties (image). Une fonction numérique est une transformation algébrique (une équation) d'une variable réelle x. On parlera ici uniquement de fonctions numériques.
On décrit une fonction par la relation algébrique entre la variable d'entrée et la variable de sortie. Par exemple,

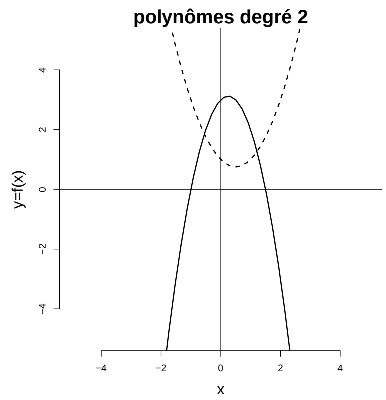
$$y = f(x) = a \cdot x + b$$

où x est l'antécédent et y l'image de x par la fonction f. On s'intéressera ici aux fonctions réelles de variables réelles, c'est à dire aux cas où x et y appartiennent à $\mathbb{R}$.
On peut représenter graphiquement une fonction dans un espace à deux dimensions.

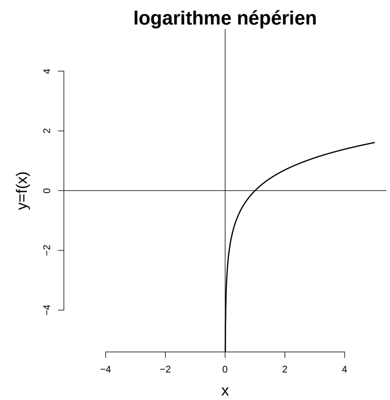
Quelques fonctions usuelles



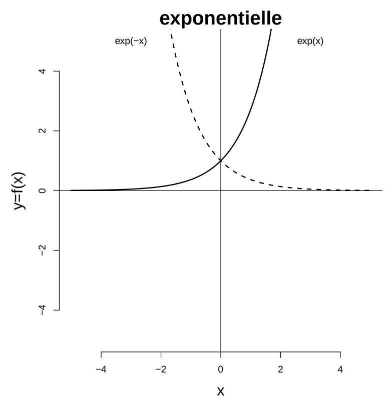
$y = 3 + 2 \cdot x$



$y = 3 + x - 2 \cdot x^2$ (traits pleins)
$y = 1 - x + x^2$ (traits pointillés)



$y = ln(x)$



$y = e^x$ (traits pleins)
$y = e^{-x}$ (traits pointillés

L'allure de la fonction est définie par les propriétés mathématiques de l'équation algébrique.

1.2 Développements limités et dérivée d'une fonction

Continuité Une fonction réelle $y = f(x)$ est continue au point x_0 si la limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$.

Développement limité d'ordre 0 : Si f est continue au point x_0, on peut l'écrire sous la forme

$$f(x) = f(x_0) + \epsilon(x) \tag{1}$$

où $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. La formule (1) s'appelle *développement limité d'ordre* 0 *de* f *en* x_0. Ainsi, dire qu'une fonction est continue est équivalent à dire qu'elle admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0.

Fonction dérivable en un point : la fonction $y = f(x)$ est dérivable au point x_0 si la limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

existe. On note cette limite soit par $f'(x_0)$ soit par $\frac{df}{dx}(x_0)$, et on l'appelle la dérivée de f en x_0.

Développement limité d'ordre 1 : Si f est dérivable au point x_0, on peut l'écrire sous la forme

$$f(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0) + \epsilon(x)(x - x_0)$$

où $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. Ceci revient à approximer f au voisinage de x_0 par une droite de pente a_1 qui passe par le point x_0. On appelle cette droite la *tangente* à $f(x)$ au point x_0 (Fig 1). En utilisant (2), on montre aisément que $f'(x_0) = a_1$. Ainsi, une fonction f est dérivable en un point si elle admet un développement limité d'ordre 1 en ce point. On peut alors écrire la fonction f sous la forme

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \epsilon(x)(x - x_0) \tag{3}$$

Graphiquement, la dérivée d'une fonction f en un point x_0 est la pente de la tangente à la courbe au point x_0 (Figure 1).

Fonction différentiable : La fonction $y = f(x)$ est différentiable si la dérivée de $f(x)$ existe pour toute valeur de x. On note cette dérivée

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

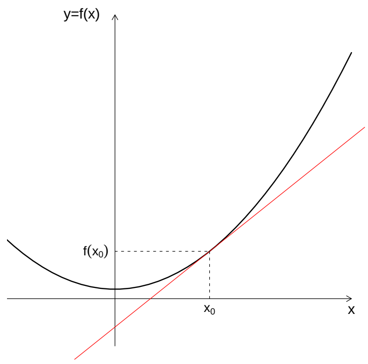


Figure 1: **Dérivée d'une fonction.** La fonction $f(x) = 1 + x^2$ est représentée en traits épais par la courbe $y = f(x)$. La dérivée de f au point x_0 est la pente de la tangente à la courbe passant par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. L'équation de la tangente correspond au développement limité d'ordre 1 de f en x_0 : $f(x) \approx f(x_0) + 2x_0 \times (x - x_0)$.

1.3 Calcul de la derivée d'une fonction

Formulaire de dérivation Les dérivées usuelles doivent être connues, ainsi que les formules de composition. Le formulaire de dérivation de la figure 2 est un outil.

FONCTIONS SIMPLES	DERIVEES	FONCTIONS DE FONCTION	DERIVEES	FONCTIONS DE FONCTION	DERIVEES
$y = x$	$y' = 1$	$y = u$	$y' = u'$	$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$
$y = ax$	$y' = a$	$y = a \cdot u$	$y' = a \cdot u'$	$y = u \cdot v$	$y' = u'v + uv'$
$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$	$y = u^m$	$y' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = ax^m$	$y' = m \cdot ax^{m-1}$	$y = a \cdot u^m$	$y' = m \cdot au^{m-1} \cdot u'$	$y = Log\ x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	$y = Log\ ax$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \frac{a}{x}$	$y' = -\frac{a}{x^2}$	$y = \frac{a}{u}$	$y' = -\frac{a}{u^2} \cdot u'$	$y = a\ Log\ x$	$y' = \frac{a}{x}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$y = Log\ u$	$y' = \frac{u'}{u}$
$y = a\sqrt{x}$	$y' = \frac{a}{2\sqrt{x}}$	$y = a \cdot \sqrt{u}$	$y' = \frac{a}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin u$	$y' = (\cos u)u'$	$y = a^x$	$y' = a^x\ Log\ a$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos u$	$y' = (-\sin u)u'$	$y = u^x$	$y' = u^x\left(Log\ u + \frac{xu'}{u}\right)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $= 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$y = \operatorname{tg} u$	$y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ $= 1 + \operatorname{tg}^2 u \cdot u'$	$y = \sin^3 x$ $y = a \sin^4 bx$	$y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$ $y' = 4a \sin^3 bx \cdot \cos bx \cdot b$
$y = Arc \sin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = Arc \sin u$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$y = u \cos x$	$y' = u' \cos x - u \sin x$
$y = Arc \cos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = Arc \cos u$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$y = a \operatorname{tg}^3 x^5$	$y' = a\operatorname{tg}^2 x^5 \cdot \frac{1}{\cos^2 x^5} \cdot 5x^4$
$y = Arc \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = Arc \operatorname{tg} u$	$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	$y = \log x$	$y' = \frac{1}{x \log 10} = \frac{M}{x}$ $(M = 0{,}43429)$

Figure 2: **Formulaire de dérivation.**

Les formules algébriques. En utilisant la définition de la dérivée (2), il est facile de montrer que si f et g sont des fonctions différentiables de x, alors,

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Si $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Derivée de la composition. La fonction $h = f \circ g(x)$, qui s'appelle la composition de f et g, est définie par la formule $h(x) = g(f(x))$. Sa dérivée en x est donnée par

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x)\ . \tag{4}$$

Exemple. Soit $h(x) = \sin^2 x$. La fonction h est une composition de la fonction quadratique $g(x) = x^2$ avec la fonction $f(x) = \sin(x)$. Alors,

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = 2f(x)f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin(2x)$$

Lien avec l'allure de la fonction Le signe de la dérivée permet de prédire si la fonction est croissante ou décroissante :

- Si la dérivée est négative, la fonction décroît.

- Si la dérivée est positive, la fonction est croissante.
- Si la dérivée est nulle, la fonction est constante.

La valeur de la dérivée donne la vitesse de l'accroissement, ou du décroissement. Plus la dérivée est élevée, plus la fonction augmente ou diminue vite avec x.

1.4 Dérivée seconde

La dérivée seconde est la dérivée de la dérivée. Son signe permet de caractériser l'allure des fonctions non linéaires :

- Si la dérivée seconde est négative, la fonction est concave.
- Si la dérivée seconde est positive, la fonction est convexe.
- Si la dérivée seconde est nulle, c'est un point d'inflexion.

Les fonctions possédant un point d'inflexion changent d'allure lorsque x varie. La valeur de la dérivée seconde mesure l'accélération ou le ralentissement dans la façon dont une fonction s'accroît ou décroît avec x. Lorsque la dérivée seconde est négative, la fonction *ralentit* : la dérivée est de plus en plus petite. Lorsque la dérivée seconde est positive, la fonction *accélère* : la dérivée est de plus en plus grande.

1.5 Fonction réciproque où fonction inverse

Supposons que f est une fonction monotone, c'est-à-dire $f'(x) \neq 0$ pour tout x. Le *théorème de la bijection* affirme qu'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle constitue une bijection entre cet intervalle et son image.
Une fonction est bijective si et seulement si tout élément de son ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent, c'est-à-dire est image d'exactement un élément. Une fonction bijective admet une fonction inverse, notée f^{-1} qui est la transformation algébrique qui relie l'antécédent y à l'image x. Une fonction et son inverse sont reliées par les propriétés suivantes :

$$y = f(x)$$

$$x = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$

La fonction inverse f^{-1} est unique et elle est continue. En utilisant la formule (4) pour la dérivée de la composition, on obtient que pour tout $y = f(x)$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \ . \tag{5}$$

Exemple: La fonction $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est bien définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On calcule la derivée de $\tan x$ en utilisant les formules algébriques,

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \ .$$

La fonction inverse $x = \arctan y$ est définie sur toute la ligne réelle $\mathbb{R}$. Selon la formule (5),

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \cos^2 x = \cos^2\left(\arctan y\right)$$

Exemples

Fonction	départ	arrivée	réciproque	départ	arrivée	note
x^n	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\sqrt[n]{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	n entier
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$ln(x)$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	
x^a	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$x^{1/a}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	a non nul
a^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$log_a(x)$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	a strictement positif
$1-e^{-\lambda x}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$-\frac{1}{\lambda}ln(1-x)$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	

Attention au problème de notation. La fonction inverse notée f^{-1} correspond à la réciproque d'une fonction bijective. On utilise aussi la notation $^{-1}$ pour une puissance de x. Ainsi, la fonction

$$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

a pour réciproque $f^{-1}(x) = 1/x$.
Par contre, la réciproque de la fonction $g(x) = x$ est $g^{-1}(x) = x$.

1.6 Intégrales et primitives

Le théorème fondamental du calcul intégral dit que pour toute fonction $y = f(x)$ continue sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, il existe une fonction primitive F, différentiable sur I, telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. Si l'existence de fonctions primitives est connue depuis longtemps, il a fallu attendre le 19ème siècle pour que Riemann propose une méthode de résolution de l'équation différentielle

$$F'(x) = f(x) \tag{6}$$

Riemann démontre que si la fonction f est continue en tout point de l'intervalle I, il est possible de calculer l'aire algébrique du domaine sous la courbe représentative de f, et que cette aire est une primitive de f. On note cette aire

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx \ ,$$

En réalité, si une fonction $f(x)$ admet une primitive sur un intervalle, elle en admet un infinité, qui diffèrent d'une fonction constante C appelée aussi *constante d'intégration.* Ainsi, toutes les fonctions

$$G(x) = \int_a^x f(x)dx + C$$

où C est une constante satisfont $G'(x) = f(x)$ (figure 3).

1.7 Etude d'une fonction

L'étude d'une fonction consiste à faire le lien entre l'équation qui décrit la fonction et sa forme graphique. Elle comprend plusieurs étapes :

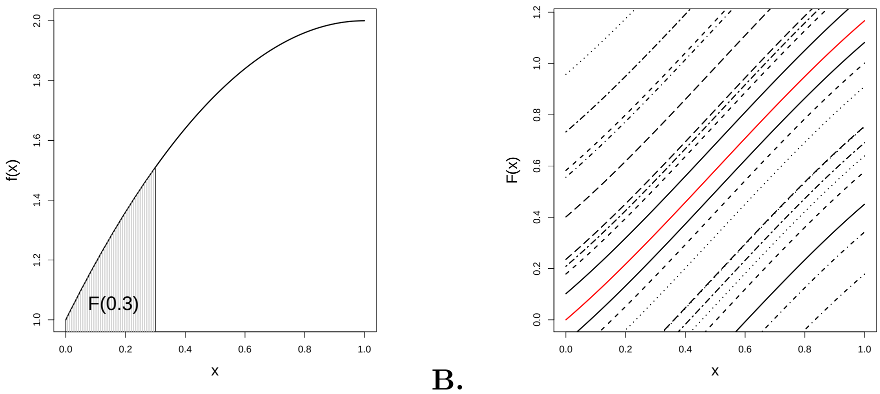
1. Domaine de définition : pour quelles valeurs de x la fonction est-elle définie ?

2. Continuité : une fonction est continue si elle est dérivable en tous points du domaine de définition.

3. Limites : étude des valeurs de y aux bornes du domaine de variation de x

4. Signe de la dérivée. Permet de dire dans quelle partie du domaine de définition la fonction est croissante, décroissante ou constante.

5. Dérivée seconde. Permet d'étudier l'allure des fonctions non-linéaires. Un point d'inflexion est un point pour lequel la dérivée seconde est nulle. Il marque un changement dans l'allure de la fonction.



A. **B.**

Figure 3: **Intégrale et primitives.** On considère la fonction $f(x) = 1 + 2x - x^2$. **A.** L'intégrale de Riemann est l'aire sous la courbe représentative de la fonction f, représentée en noir. En grisé, l'intégrale de $f(x)$ entre 0 et 0.3, notée $F(0.3)$. **B.** Quelques primitives de f, de la forme $G(x) = \int_0^x f(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation différentielle $G'(x) = f(x)$. En rouge, la primitive $F(x)$ pour laquelle la constante d'intégration vaut $C = 0$.

1.8 Exemple : croissance en hauteur des arbres

La croissance en hauteur des arbres est une variable importante en foresterie car elle permet de faire des prédictions de rendement. Les données de la figure 4 représentent des mesures individuelles réalisées sur 220 sapins (*Pinus abies*) d'une forêt norvégienne au cours du siècle dernier (Kindermann, G. E., Kristöfel, F., Neumann, M., Rössler, G., Ledermann, T. & Schueler, S. *figshare* `https://doi.org/10.6084/m9.figshare.c.3971019` (2018)).

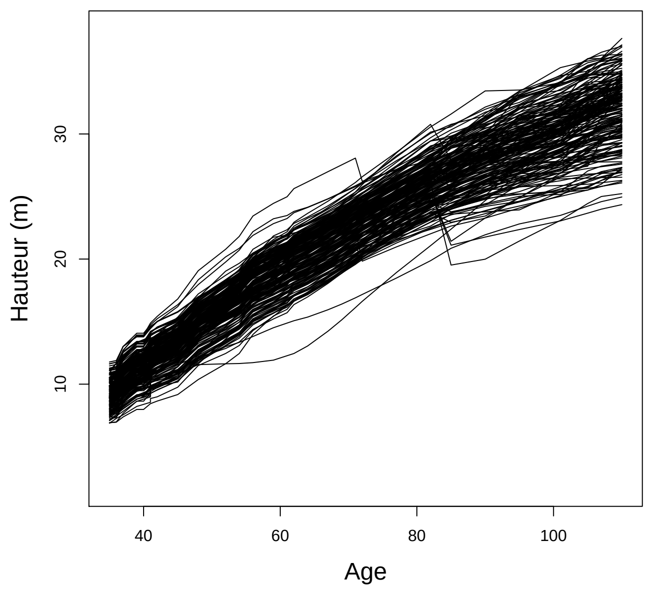


Figure 4: **Evolution de la hauteur des sapins d'une forêt norvégienne.** Chaque courbe correspond à un arbre. Les données ont été mesurées durant presque cent années entre 1923 et 1997 et sont aujourd'hui partagées librement

La fonction de Chapman-Richard est utilisée pour modéliser la croissance en hauteur des arbres au cours du temps :

$$y(t) = A\left(1 - e^{-k \cdot t}\right)^p \tag{7}$$

Que pouvez-vous dire de cette fonction ? Représente-t-elle correctement la croissance en hauteur d'un arbre ? Vous pouvez vous aider du script R de l'annexe C. Réalisez l'étude ce cette fonction. Le calcul de la dérivée seconde est détaillé dans l'annexe B

Etude de la fonction de Chapman-Richards. Le tableau ci-dessous représente l'étude de la fonction.

t	0		$\frac{ln(p)}{k}$		$+\infty$
y'	0	+	+	+	0
y''	0	+	0	-	$-\infty$
y	0	convexe	+	concave	A

Il permet de donner un sens biologique aux paramètres :

A est la hauteur maximale de l'arbre lorsqu'il a fini sa croissance.
L'existence d'un point d'inflexion permet de définir deux périodes dans la vie d'un arbre : en début de vie, la croissance s'accélère au cours du temps (dérivée seconde positive) et la courbe est convexe. Après un temps déterminé par la valeur de $\frac{ln(p)}{k}$, la croissance ralentit (dérivée seconde négative) jusqu'à devenir presque nulle (la dérivée première tend vers zéro).
Modifiez le script `chapman.R` pour observer l'allure de la fonction pour différentes valeurs des paramètres.

2 Equations différentielles

Les équations différentielles sont des équations de vitesses, qui décrivent le comportement de la dérivée d'une fonction. Leurs solutions sont des fonctions et sont obtenues par un *calcul intégral*. Elles sont utilisées pour décrire des phénomènes qui varient dans le temps ou dans l'espace.
On distingue généralement deux types d'équations différentielles :

- les équations différentielles ordinaires (ODE) où la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable. En biologie, cette variable est souvent le temps ou une dimension l'espace.
- les équations différentielles partielles, plutôt appelées équations aux dérivées partielles (PDE), où la ou les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables indépendantes (par exemple, le temps ET l'espace.

Dans ce cours, on se restreindra aux équations différentielles ordinaires (ODEs). Une ODE est une équation :

- dont l'inconnue est une fonction $x = f(t)$ dépendant de t
- qui fait intervenir x et certaines de ses dérivées $x', x'', ...$ et éventuellement la variable t sous la forme :

$$x' = g(x, t) \tag{8}$$

Résoudre l'équation différentielle (on dit aussi *intégrer*), c'est chercher toutes les fonctions f définies sur un intervalle, qui satisfont l'équation 8.

2.1 Exemple : l'équation logistique

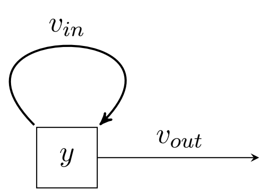
En biologie, il arrive souvent que l'on ne sache décrire un processus dynamique, se déroulant au cours du temps, que par la description de ce qui se passe à chaque instant. L'équation logistique décrit la dynamique de populations (molécules, cellules, individus) qui, à chaque instant, meurent ou se reproduisent. La cause de la mort est la compétition pour les ressources.

- La reproduction est proportionnelle au nombre d'individus et se fait avec une efficacité mesurée par une constante a.
- La mort intervient lorsque deux individus se rencontrent. Elle est proportionnelle au carré du nombre d'individus, avec une efficacité mesurée par une constante b.

On peut remplacer *reproduction* par *synthèse* et *mort* par *dégradation*.
Si $y(t)$ est le nombre d'individus au temps t, on a, à chaque instant :

$$y' = g(y) = ay - by^2 \tag{9}$$

Représentation graphique On peut représenter la dynamique du système avec des compartiments reliés par des flèches.



La figure ci-dessus correspond à l'équation

$$x' = v_{in} - v_{out}$$

où v_{in} (v_{out}) sont les vitesses de reproduction et de mort de x. Tout l'art du biologiste consiste à choisir la forme de ces équations de vitesse, en fonction des connaissances du phénomène qui est modélisé.

Remarque : L'équation de Chapman-Richards découle d'une forme plus générale de l'équation logistique

$$y' = ay - by^m$$

Exercice : L'équation 9 est un polynôme de degré deux. Réalisez l'étude de la fonction $g(y)$ dans le cas où a et b sont strictement positifs.

On considèrera que le domaine de variation de y est $[0, +\infty[$. En étudiant $g(y)$, on peut dire déjà beaucoup de choses sur la fonction inconnue $y(t)$. En particulier :

- La fonction est croissante lorsque $y < \frac{a}{b}$, et décroissante sinon. Elle est constante pour $y = 0$ et $y = \frac{a}{b}$
- La fonction est convexe lorsque $y < \frac{a}{2b}$ ou $y > a/b$, et concave sinon. Elle admet un point d'inflexion lorsque $y < \frac{a}{2b}$.

En utilisant ces éléments d'information, représentez les fonctions possibles $y(t)$ dans le plan (y, t) pour différentes valeurs initiales de y au temps $t = 0$.

Une équation différentielle admet une infinité de solutions, qui dépendent des conditions initiales

2.2 Résolution d'une équation différentielle

2.3 Méthode analytique : Intégration

La résolution d'une équation différentielle se fait en deux étapes

1. Intégrer la fonction $g(y, t)$ sur le domaine de variation pour trouver la fonction

$$y(t) = f(t) = \int g(y, t)dt + C$$

2. Choisir la valeur constante C de façon à ce que la fonction $f(t)$ passe par les conditions initiales.

Théorème : Le théorème de Cauchy-Lipschitz dit que sous certaines conditions de continuité de la fonction $g(y, t)$, il existe une solution et une seule de l'équation $y' = g(y, t)$ qui vérifie $f(t_0) = y_0$.

Une équation différentielle admet une infinité de solutions, qui dépendent des conditions initiales. Les solutions sont uniques et ne se croisent pas.

Résolution des EDOs linéaires d'ordre 1 Une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 est de la forme :

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \tag{10}$$

où a(t) et b(t) peuvent être des fonctions du temps. Elle peut aussi s'écrire $y'(t) - a(t) \cdot y(t) = b(t)$
Elle se résoud en quatre étapes :

1. *Résolution de léquation homogène* L'équation homogène est l'équation sans second membre, soit $y'(t) - a(t) \cdot y(t) = 0$.
   La solution de cette équation est de la forme $y^H(t) = C.e^{A(t)}$ avec $A(t)$, primitive de la fonction $a(t)$.
2. *Recherche d'une solution particulière* La solution particulière de $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ est notée $y^P(t)$. Pour calculer $y^P(t)$, il faut résoudre $y'(t) = 0$
   On obtient ainsi $y(t) = -\frac{b(t)}{a(t)}$ donc $y^P(t) = -\frac{b(t)}{a(t)}$

3. *Solution générale* La solution générale est ensuite obtenue en ajoutant la solution de l'équation homogène $y^H(t)$ à celle de l'équation particulière $y^P(t)$. On obtient donc une solution générale de la forme
$$y(t) = C.e^{A(t)} - \frac{b(t)}{a(t)}$$

4. *Conditions initiales* La solution qui passe par les conditions initiales (à $t = 0$, $y(0) = y_0$) satisfait
$$y_0 = C - \frac{b(t)}{a(t)}$$

   Donc,
$$y(t) = \left(y_0 + \frac{b(t)}{a(t)}\right) e^{A(t)} - \frac{b(t)}{a(t)}$$

Résolution de l'équation logistique On peut résoudre assez facilement l'équation logistique (9), en utilisant un changement de variable. Pour tout $y \neq 0$, (9) s'écrit aussi:
$$\frac{y'}{y^2} = \frac{a}{y} - b$$
En posant $u = \frac{1}{y}$ (donc $u' = -\frac{y}{y^2}$), résoudre l'équation logistique revient donc à résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme
$$u' = b - a \cdot u$$
la solution est la suivante :
$$y(t) = \frac{a}{b} \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{ay_0} - 1\right) e^{-at}}$$
où y_0 est la valeur de y au temps $t = 0$.

2.3.1 Méthode numérique : la méthode d'Euler

En utilisant (2), on peut écrire :
$$y' = g(y,t) \approx \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \Leftrightarrow f(t+h) = f(t) + h \cdot g(y,t)$$
En partant de la valeur y_0 au temps $t = 0$, on approxime la fonction f par sa forme linéaire et on calcule numériquement les valeurs successives de y après chaque petit intervalle de temps h. Cette méthode marche uniquement si l'on choisit des valeurs de h suffisamment petites.
Il existe des méthodes plus efficaces pour résoudre numériquement une équation différentielle. Ces méthodes sont toutes basées sur l'approximation de la fonction inconnue par un polynôme, au voisinage du point de départ. Elles font intervenir, en plus de la dérivée première, les dérivées d'ordre supérieur.

Exercice : On considère la forme la plus simple de l'équation logistique
$$y' = y(1 - y)$$
Ecrivez un script sous R pour représenter graphiquement la fonction $y(t)$ en utilisant la méthode d'Euler. Comparez le résultat avec la solution exacte.
Si l'on connaît la dérivée d'une fonction en chaque point, on peut donc *reconstituer* numériquement la fonction.

2.4 Etude graphique

2.4.1 Portrait de phase

A partir de l'équation différentielle (9), on aimerait pouvoir déterminer l'ensemble des courbes intégrales possibles, c'est-à-dire les fonctions $y(t)$ du temps qui satisfont (9). En réalité, ce que l'on connaît, c'est la valeur de la dérivée de la fonction $y'(t)$ à chaque temps t.
Rappel *Graphiquement, la dérivée d'une fonction est la pente de la tangente au graphe de la fonction.* Ainsi, la connaissance de la dérivée de la fonction permet de prédire une partie de la courbe intégrale. Si la dérivée est positive, cela veut dire que y va augmenter au cours du temps. Si la dérivée est négative, cela veut dire que y va diminuer. Si la dérivée est nulle, cela veut dire que y reste constante. On peut représenter les tangentes aux courbes intégrales en n'importe quel point de l'espace défini par y et t, c'est le *portrait de phase élargi*.
On peut remarquer que, dans l'équation (9), la fonction $g(y) = a \cdot y \left(1 - \frac{b}{a}\right)$ qui donne la dérivée $y'(t)$ ne dépend pas du temps. On peut donc condenser l'information en ne s'intéressant qu'à l'axe des valeurs possibles de y, qui sont ici toutes les valeurs possibles entre 0 et $+\infty$. On dessine alors le *portrait de phase*. Pour chaque valeur de y, on représente par une flèche ce qui se passe si l'une des courbes intégrales atteint cette valeur :

- Si la dérivée $g(y)$ est positive, y augmente, la flèche va dans la direction des valeurs croissantes de y.
- Si la dérivée $g(y)$ est négative, y diminue, la flèche va dans la direction des valeurs décroissantes de y.
- Si la dérivée est nulle pour tout t, y reste constante, il s'agit d'un point d'équilibre que l'on représente par un point.

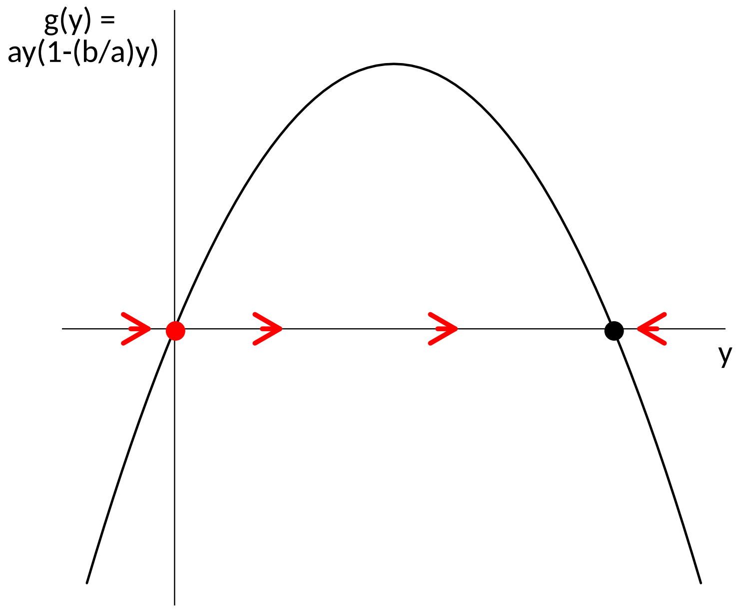


Figure 5: **Portrait de phase pour l'équation logistique** $y' = a \cdot y \left(1 - \frac{b}{a}\right)$. Pour cette équation, on peut représenter le signe de y' en fonction des valeurs possibles de y. y varie entre zéro et $+\infty$. Le signe de la dérivée est le même (positif) pour toutes les valeurs de y dans l'intervalle $]0, \frac{a}{b}[$. On le représente par une flèche dirigée vers les valeurs croissantes de y dans l'espace des phases. De même, le signe de la dérivée est le même (négatif) pour toutes les valeurs de y dans l'intervalle $]\frac{a}{b}, +\infty[$. On le représente par une flèche dirigée vers les valeurs décroissantes de y dans le champ de direction. Enfin, il y a deux points particuliers, (0) et $(\frac{a}{b})$ pour lesquels la dérivée s'annule.

2.4.2 Point d'équilibre

Définition d'un point d'équilibre **Définition :** *Un point d'équilibre est une solution constante de l'équation différentielle, pour laquelle la dérivée par rapport au temps est nulle. Un point d'équilibre est aussi appelé état stationnaire.*

Dans notre exemple, il y a deux points d'équilibre, pour lesquels

$$y' = g(y) = a \cdot y \left(1 - \frac{b}{a}\right) = 0$$

qui sont $y_1^* = 0$ et $y_2^* = \frac{a}{b}$.
Les trajectoires qui passent par un point d'équilibre y restent.

Stabilité d'un point d'équilibre **Définition :** *Un point d'équilibre est stable si toutes les trajectoires au voisinage de ce point convergent vers lui.*

Une autre façon de définir la stabilité, au sens mathématique, d'un équilibre est la robustesse face aux perturbations. Si, sous l'effet d'une petite perturbation externe, une trajectoire s'écarte du point d'équilibre, elle y revient en un temps fini.

La stabilité d'un point d'équilibre y^* est déterminée de la façon suivante :

- y' est positif pour $y < y^*$.
- y' est négatif pour $y > y^*$.

Dans l'exemple de l'équation logistique, il existe un seul équilibre stable $y^* = \frac{a}{b}$. La stabilité d'un équilibre se trouve graphiquement en regardant le portrait de phase (Figure 5)

NB La stabilité au sens mathématique est une notion différente que la stabilité au sens biologique. On pourrait penser par exemple que $y = 0$ est un point d'équilibre, car la génération spontanée n'existant pas, s'il n'y a aucune bactérie dans le tube à essai, il n'y en aura jamais. Cependant, ce que nous dit l'équation (9), c'est que si par hasard une bactérie arrive dans le tube à essai, alors la population va augmenter et se stabiliser à la valeur $y^* = \frac{a}{b}$. Le point $y = 0$ est un point d'équilibre instable.

La vie et la mort La figure 6 montre quelques exemples de courbes intégrales déterminées par l'équation (9). On voit bien qu'il n'existe qu'un seul équilibre stable. En particulier, si le nombre initial d'individus est trop élevé ($y_0 > \frac{a}{b}$), la population va décroitre (plus de morts que de naissances) jusqu'à atteindre $y^* = \frac{a}{b}$

2.4.3 Généralisation : équilibres dynamiques

Dans l'étude des systèmes dynamiques, un attracteur (ou ensemble-limite) est un ensemble d'états vers lequel un système évolue de façon irréversible. On verra plus tard des exemples pour lesquels l'attracteur est un cycle.
Un point d'équilibre stable est aussi appelé un point fixe attrractif.

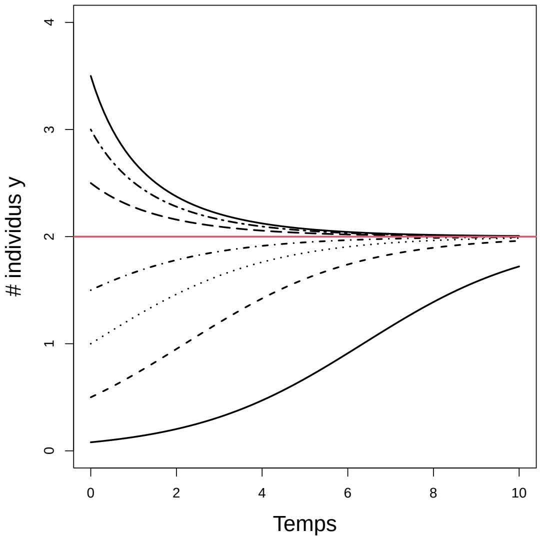


Figure 6: **Exemples de courbes intégrales pour l'équation logistique** $y' = ay - by^2$. Evolution de y au cours du temps pour différentes valeurs de y_0. Les paramètres de l'équation sont ici $a = 0.5$ et $b = 0.25$. On remarque que toutes les courbes intégrales convergent vers le point d'équilibre $y^* = 2$.

3 Systèmes d'équations différentielles

Un système d'équation différentielles, ou système dynamique, est un système d'équations qui décrit la vitesse simultanée de changement de plusieurs variables au cours du temps. Il découle d'un modèle permettant de décrire le comportement instantané d'un phénomène qui se déroule au cours du temps et qui fait intervenir plusieurs variables.

3.1 Système linéaire : une histoire d'amour

Cette section est inspirée de l'article `S.H.Strogatz,Loveaffairsanddifferentialequations(1988),MathematicsMagazine,61:1,35-35`.
L'auteur considère l'évolution d'une histoire d'amour entre deux personnes, Roméo et Juliette, et suppose que l'amour peut se quantifier par une variable mesurable.

- $x(t)$ est le degré d'amour (ou de haine) de Juliette pour Roméo au temps t
- $y(t)$ est le degré d'amour (ou de haine) de Roméo pour Juliette au temps t

Bien sûr, les sentiments changent au cours du temps et peuvent dépendre du tempérament de chaque partenaire, mais aussi de leur comportement vis-a vis de l'autre partenaire. On peut écrire ce système de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & ax + by \\ y' & = & cx + dy \end{array} \right. \tag{11}$$

où a, b, c, d sont des paramètres dont la valeur peut-être positive ou négative.
Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Excercice Proposez des valeurs pour ces paramètres et tentez de les interpréter. Que se passe-t-il par exemple lorsque l'on a $(a = 0, b = -2, c = +1, d = 0)$? Existe-t-il au moins un état d'équilibre que vous pouvez trouver facilement ?

3.1.1 Résolution du système

On peut manipuler les équations du système (11). Pour cela, on suppose $b \neq 0$

$$x' = ax + by \Leftrightarrow y = \frac{1}{b}(x' - ax) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{b}(x'' - ax')$$

De même,

$$y' = cx + dy \Leftrightarrow y' = cx + \frac{d}{b}(x' - ax)$$

Résoudre (11) revient donc a résoudre une équation ODE du second ordre en x avec des coefficients constants :

$$x" - (a + d)x' - (ad - bc)x = 0$$

On peut remarquer ici que $a + d$ est la trace de la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, et que $ad - bc$ est son déterminant. Ainsi, il faut résoudre

$$x" - Tr(A) \cdot x' + det(A) \cdot x = 0 \tag{12}$$

La solution de (12) dépend de la nature des valeurs propres de la matrice A, qui sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A)$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = Tr(A)^2 - 4Det(A)$$

On peut donner une représentation des solutions en fonction des valeurs de $Tr(A)$ et $Det(A)$ et du signe du discriminant *Delta*. A noter que la courbe représentative de $\Delta = 0$ dans le plan *Tr(A), Det(A)* est la parabole d'équation $y = x^2/4$. Lorsque $\Delta < 0$, les valeurs propres de la matrice A sont des nombres complexes et $y > x^2/4$.

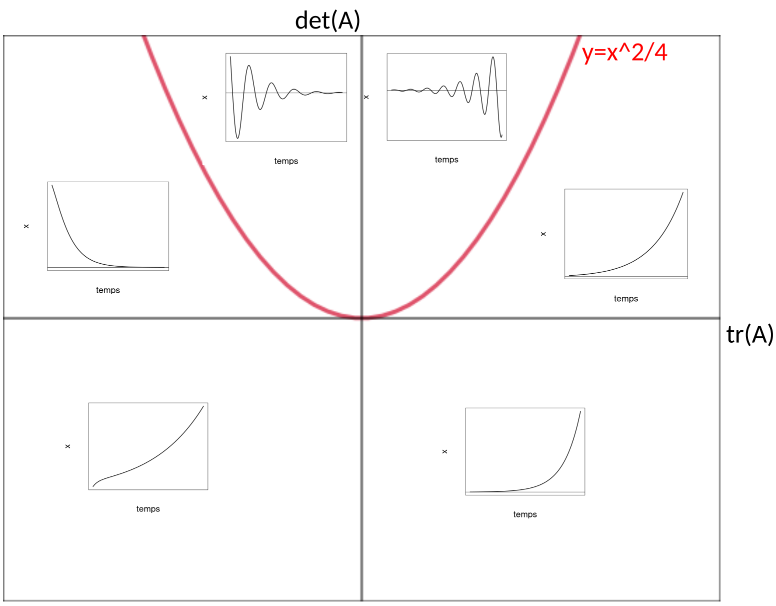


Figure 7: Nature des solutions pour x dans un système ODE linéaire à deux dimensions. Pour chacun des exemples, la condition initiale est identique ($x_0 = 0.1, y_0 = 0.2$)

La table ci-dessous donne les valeurs des paramètres utilisés pour composer la figure 7.

Cas	a	b	c	d	tr(A)	Det(A)	Δ
A	4	1	-1	1	5	5	5
B	0	1	-2	0.3	0.3	2	-7.91
C	-3	1	1	-3	-6	8	4
D	1	-3	4	-2	-1	10	-39
E	1	3	1	2	3	-1	13
F	-1	3	1	-2	-3	-1	13

Exercice Retrouvez les six situations décrites dans la table et essayez d'interpréter ces résultats.

3.1.2 Diagramme de phase

En réalité, il faut considérer à la fois les changements de x et de y au cours du temps. On peut représenter ces changements dans le plan (x, y). Considérons le cas A précédent, défini par le système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 4x + y = f(x,y) \\ y' & = & -x + y = g(x,y) \end{array} \right. \tag{13}$$

La figure 8 montre quelques exemples de trajectoires à partir de différentes conditions initiales.

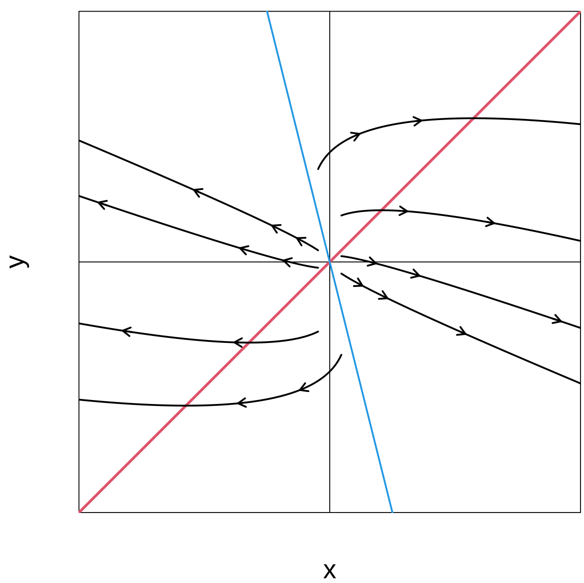


Figure 8: **Exemples de trajectoires** pour x et y, solutions du système (14). Chaque trajectoire correspond à une condition initiale différente.

Cette représentation permet d'étudier l'allure des trajectiores, mais ne donne pas d'information sur le temps. Elle est utilisée pour étudier les situations d'équilibre.

Exercice : Interprétez ces trajectoires et expliquez en quoi ce système correspond à une situation d'amours impossibles.

On peut décrire l'évolution d'un système d'équations différentielles sans calculer explicitement les solutions de ce système, mais en décrivant qualitativement l'allure des trajectoires. Cette représentation est appellée *portrait ou diagramme de phase.*

Isocline verticale Pour tous les points de la droite $y = -4x$, on a $f(x, y) = 0$ et donc $x = Cte$. La fonction $v(x) = -4x$ est appellée **isocline verticale**. On peut utiliser cette fonction pour déterminer le signe de $g(x, y)$ en chaque point du plan $(x, y$.

- $y > -4x$: $f(x, y) > 0$ et x augmente.
- $y = -4x$: $f(x, y) = 0$ et x est constante.
- $y < -4x$! $f(x, y) < 0$ et x diminue.

Isocline horizontale Pour tous les points de la droite $y = x$, on a $g(x, y) = 0$ et donc $y = Cte$. La fonction $h(x) = x$ est appellée **isocline horizontale**. On peut utiliser cette fonction pour déterminer le signe de $g(x, y)$ en chaque point du plan $(x, y$.

- $y > x$: $g(x, y) > 0$ et y augmente.
- $y = x$: $g(x, y) = 0$ et y est constante.
- $y < x$! $g(x, y) < 0$ et y diminue.

Point d'équilibre Les points d'équilibre se trouvent aux intersections des isoclines horizontales et verticales. Ce sont les points pour lesquels on a à la fois $f(x, y) = 0$et $g(x, y) = 0$.
Le système (14) n'admet qu'un seul point d'équilibre $(0, 0)$ pour lequel on a à la fois $x' = 0$et $y' = 0$.

Portrait de phase Les isoclines horizontales et verticales définissent des régions du plan (x, y). A l'intérieur d'une même région, l'allure des trajectoires est la même.

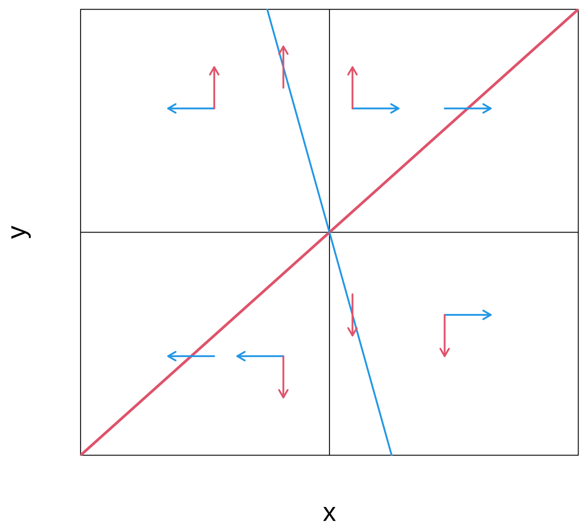


Figure 9: **Portrait de phase** du système (14). Les flèches bleues représentent la direction des changements de x au cours du temps dans chacune des régions de l'espace des phases délimitées par les isoclines. Les flèches rouges représentent la direction des changements de y au cours du temps.

Exercice : Comparez les figures 8 et 9. Que pouvez-vous dire du point d'équilibre $(0, 0)$?

3.1.3 Classification des points d'équilibre

La nature des points d'équilibre dépend des caractéristiques de la matrice A qui décrit le système d'équations différentielles, et notamment du signe de $Tr(A)$ et $Det(A)$.
Le théorème ci-dessous s'applique de façon plus général aux systèmes linéaires d'équation différentielles avec ou sans *second membre* de la forme :

$$\begin{cases} x' &= ax + by + m \\ y' &= cx + dy + M \end{cases} \tag{14}$$

qui s'écrivent matriciellement

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ M \end{bmatrix}$$

Théorème : Si $Det(A) \neq 0$ alors $(0,0)$ est le seul point d'équilibre et on a :

- Si $Det(A) < 0$ alors le point d'équilibre $(0,0)$ est un équilibre instable (point selle).
- Si $Det(A) > 0$ et $Tr(A) > 0$ alors le point d'équilibre $(0,0)$ est un équilibre instable (point répulsif).
- Si $Det(A) > 0$ et $Tr(A) < 0$ alors le point d'équilibre $(0,0)$ est un équilibre stable (point attractif).
- Si $Det(A) > 0$ et $Tr(A) = 0$ alors le point d'équilibre $(0,0)$ est un équilibre instable (centre).

Si $Det(A) = 0$, alors l'ensemble des points d'équilibre est une droite (cas dégénéré).

Par ailleurs, la forme des trajectoires dépend du signe du discriminant de A. En particulier, lorsque $\Delta < 0$, les trajectoires forment des spirales ou des cercles.
La figure 10 montre la nature des points d'équilibre et la forme des trajectoires en fonction des valeurs de $Tr(A)$ et $Det(A)$.

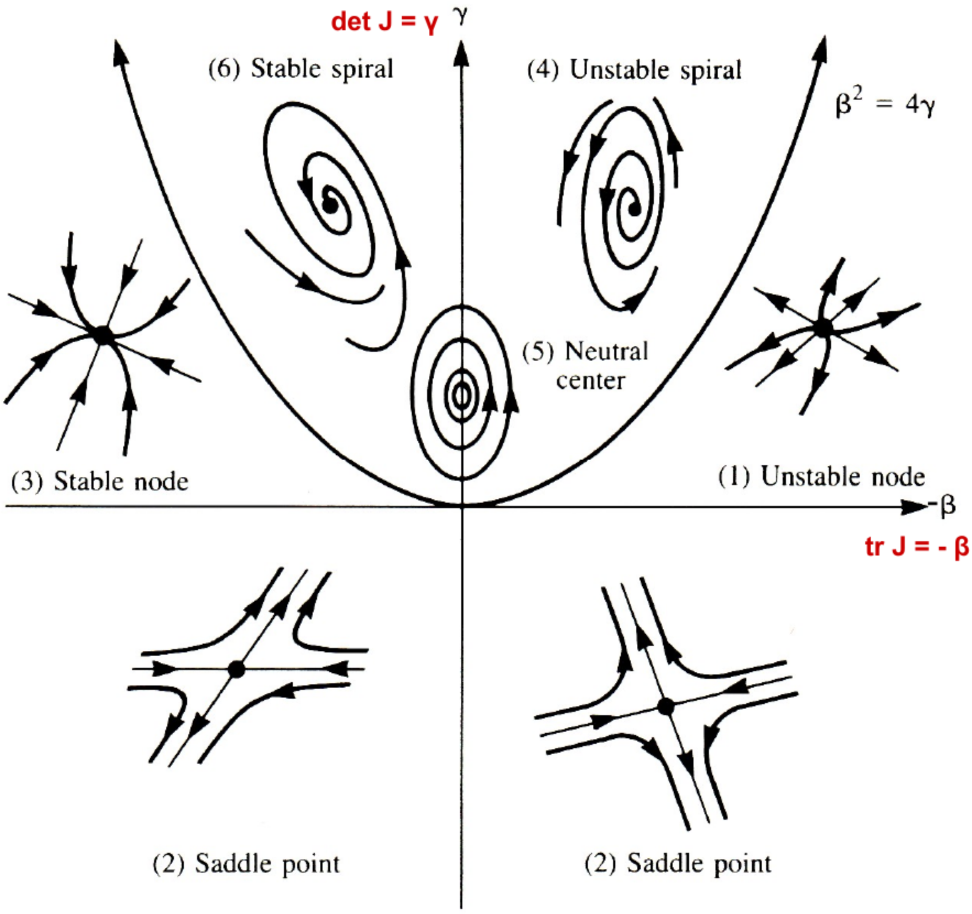


Figure 10: **Nature du point d'équilibre (0,0) dans un système linéaire d'équations différentielles**. D'après J.D.Murray. Mathematical biology. Springer, 2002.

3.1.4 Exemple

Supposons que Roméo est un amoureux volage. Plus Juliette l'aime, plus il la déteste. Par contre, si Juliette se désintéresse de Roméo, Roméo recommence à l'aimer. Juliette, elle, répond à l'amour de Roméo : son amour grandit quand Roméo l'aime. Son amour diminue lorsque Roméo la haît. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} x' &= -by = f(x,y) \\ y' &= cx = g(x,y) \end{cases} \tag{15}$$

Sans résoudre cette équation différentielle, représentez l'allure des trajectoires dans les plans (x,t) et (y,t).

3.2 Systèmes non linéaires : Lotka-Voltera

En écologie, le modèle de Lotka-Voltera décrit la dynamique d'un système proie-prédateur particulier dans lequel le prédateur ne se nourrit que d'une seule espèce. Il s'écrit :

$$\begin{cases} x' &= ax - bxy = f(x,y) \\ y' &= cxy - dy = g(x,y) \end{cases} \tag{16}$$

C'est un système *non linéaire* et la matrice $A = \begin{bmatrix} a & -by \\ cx & -d \end{bmatrix}$ qui décrit le système change au cours du temps selon les valeurs de x et de y.

3.2.1 Portrait de phase

L'étude des fonctions $f(x,y)$ et $g(x,y)$ permet de tracer le portrait de phase du système.

Isoclines verticales Le système 16 possède deux isoclines verticales : les droites $x = 0$ et $y = a/b$, pour lesquelles $f(x,y) = 0$ et x ne change pas.

- si $y > a/b$, $f(x,y) < 0$ et x diminue.
- si $y < a/b$, $f(x,y) > 0$ et x augmente.

Isoclines horizontales Le système 16 possède deux isoclines horizontales : les droites $y = 0$ et $x = c/d$, pour lesquelles $g(x,y) = 0$ et y ne change pas.

- si $x < d/c$, $g(x,y) < 0$ et y diminue.
- si $x > d/c$, $g(x,y) > 0$ et y augmente.

Points d'équilibre Le système possède deux points d'équilibre : $(0,0)$ et $(c/d, a/b)$.
Pour étudier la stabilité des points d'équilibre, on peut utiliser un développement limité d'ordre 1 et approcher les fonctions $f(x,y)$ et $g(x,y)$ par des droites au voisinage du point d'équilibre.

3.2.2 Linéarisation du système

Dérivée partielle : La dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables est sa dérivée par rapport à l'une de ses variables, les autres étant gardées constantes.
La dérivée partielle de la fonction $f(x,y)$ par rapport à la variable x se note $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

Définition : *Si f est une fonction de x et y et dx et dy sont des accroissements infinitésimaux de x et y, respectivement, alors l'accroissement infinitésimal correspondant de f est :*

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

Cette expression est la *différentielle totale* de f.

On utilise cette définition pour proposer un développement limité d'ordre 1 de f au voisinage d'un point (x^*, y^*), en considérant que les accroissements $dx = (x - x^*)$ et $dy = (y - y^*)$ sont petits. Laa version bivariée de l'équation (3) s'écrit

$$f(x,y) = f(x^*, y^*) + (x - x^*)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + (y - y^*)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \epsilon(x)(x - x^*) + \epsilon(y)(y - y^*) \tag{17}$$

Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre Tout système tel que le système (16) peut s'écrire sous la forme suivante au voisinage d'un point d'équilibre (x^*, y^*) :

$$\begin{cases} x' &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(y - y^*) \\ y' &= \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}(y - y^*) \end{cases} \tag{18}$$

Le système (18) est un système linéaire d'équations différentielles ordinaires avec second membre, dont la matrice est appellée la *matrice Jacobienne*, notée J :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

La stabilité des points d'équilibre dépend des propriétés de la matrice Jacobienne.

Exercice : Etudiez la stabilité des deux points d'équilibre du système proie-prédateur (16). Faites des représentations graphiques des trajectoires en vous aidant du script `lotka-voltera.R` présenté en Annexe D

A Déroulé des scéances

Le cours se déroule sur quatre périodes de 1h30 chacunes et s'appuie sur les éléments du poly.

1. **Rappels sur les fonctions**
   - Introduction : équation, fonction (10mn)
   - Etude de la fonction de Chapmann-Richard : domaine de définition, limites, dérivée première, dérivée seconde. Les définitions sont données au fur et à mesure. Compter 30mn pour que les étudiants fassent le calcul de la dérivée première de la fonction.
   - Travail sous R pour changerles paramètres de la fonction et regarder l'allure des courbes (30mn)
   - Bilan : si on connait la dérivée d'une fonction, on peut déjà dire pas mal de choses sur cette fonction. (10mn)
2. **Equations différentielles ordinaires** Etude de l'équation logistique. Portrait de phase en une dimension. Notion d'équilibre et stabilité. *étude de la fonction* $g(y) = ax - bx^2$ *et tracer des trajectoires*

   Compter 30mn pour l'étude de la fonction. Existence du point d'inflexion. Tracer des trajectoires.

   15mn sur l'intégration et les méthodes de résolution. Théorème de Cauchy-Libschitz sur l'existence et l'unicité des solutions.

   Exercice à faire à la maison = résoudre l'équation logistique
3. **Systèmes EDOs**
   - Résolution avec les mains. Ecriture matricielle. Equation caractéristique. (20mn)
   - Interprétation figure 7 du poly (30mn)
   - Cas de l'amour impossible. Portrait de phase. Interprétation des trajectoires (30mn)
   - Classification des équilibres (10mn)
4. **Systèmes EDOs et linéarisation**
   - Système linéaire avec un centre (30mn)
   - Réalisation du portrait de phase de Lotka-Voltera (30mn)
   - Linéarisation (30mn)

B Etude de la fonction de Chapman-Richards

Pour simplifier, on peut procéder à un changement de variable. On pose $u = e^{-kt}$, donc $u' = -ke^{-kt} = -ku$. L'équation de Chapman-Richard s'écrit alors :

$$y(u) = A\,(1-u)^p$$

Comme u varie entre 1 et zéro, y est du signe de A. Par ailleurs, lorsque t devient grand, u devient petit et tend vers zéro. y tend vers A lorsque t tend vers $+\infty$.
Pour calculer la dérivée de y par rapport à t, on utilise les formules de composition des dérivées :

$$\begin{array}{rcc} y' & = & A \cdot p \cdot (1-u)^{p-1} \cdot (-u') \\ & = & A \cdot p \cdot \frac{(1-u)^p}{1-u} \cdot k \cdot u \\ & = & A(1-u)^p \cdot k \cdot p \cdot \frac{u}{1-u} \end{array}$$

On trouve donc

$$y' = y \cdot k \cdot p \frac{u}{1-u}$$

Si A, k et p sont des constantes positives, la dérivée est toujours positive ou nulle. Elle est nulle pour $u = 0$, c'est à dire quand t tend vers $+\infty$. Donc la fonction est croissante.
La dérivée seconde se calcule également en utilisant les formules de composition :

$$\begin{array}{rcc} y' & = & k \cdot p \cdot \left(y' \frac{u}{1-u} + y \frac{-ku(1-u) - uku}{(1-u)^2} \right) \\ & = & k \cdot p \cdot \left(y \cdot k \cdot p \frac{u}{1-u} \frac{u}{1-u} + y \frac{-ku}{(1-u)^2} \right) \\ & = & k^2 \cdot p \cdot y \left(p \frac{u^2}{(1-u)^2} - \frac{u}{(1-u)^2} \right) \end{array}$$

On trouve donc,

$$y'' = k^2 \cdot p \cdot y \frac{u}{(1-u)^2}(pu - 1)$$

Si k et p sont des constantes positives, le signe de la dérivée seconde dépend du signe de $(pu - 1)$.
La fonction admet un point d'inflexion pour $u = 1/p$, soit

$$t = \frac{ln(p)}{k}$$

Lorsque t est petit, u est grand et la dérivée seconde est positive. La fonction est convexe. Lorsque t est grand, u devient petit et la dérivée seconde est négative. La fonction est alors concave.

C Code pour l'étude de la fonction de Chapmann-Richard

../figs/derivees/chapman.R

```
# Using some data from the British yield table for Scots pine, YC 14.
topHeight <- c(8.9, 11.6, 13.9, 15.9, 17.8, 19.6, 21.3, 22.8, 24.2,
+ 25.4, 26.5, 27.4, 28.3, 29.0, 29.7, 30.3, 30.7, 31.1)
age <- c(17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, 62, 67, 72, 77, 82, 87,
+ 92, 97, 102)

### Programmation de la fonction de Chapman-Richards
A <- 35.231
k <- 0.023
p <- 1.236
crfun <- function(x){A*(1-exp(-k*x))^p}

### Représentation graphique
x <- seq(0,150,length=500)
plot(x,crfun(x),type="l")
points(age,topHeight)


#### Point d'inflexion
abline(v=log(p)/k,col=2)


### jouer avec les paramètres de la fonction
### Programmation de la fonction de Chapman-Richards
A <- 35.231
k <- 0.023
p <- 2.236
crfun <- function(x){A*(1-exp(-k*x))^p}
x <- seq(0,150,length=500)
plot(x,crfun(x),type="l",ylim=c(0,A))
k <- 0.05
points(x,crfun(x),type="l",lty=2)
k <- 0.01
points(x,crfun(x),type="l",lty=3)
```

D Code pour l'étude d'un système proie-prédateur

Ce code illustre l'utilisation de la fonction *lsoda* de R qui permet de résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles.

../figs/systems/lotka.R

```r
### Exemple d'utilisation de la librairie deSolve
## Charger la librairie sour R
library(deSolve)

##################################################################
##### Description du système
## Cette fonction est une fonction générique qui décrit
##      le système d'équations différentielles à étudier
POPmod <- function(Time, State, Pars)
{
  with(as.list(c(State, Pars)),
       {
         dx     = a*x-b*x*y
         dy     = c*x*y-d*y
         return(list(c(dx, dy)))
       }
  )
}

## Définition des paramètres et conditions initiales
## Paramètres dans le vecteur pars
pars <- c(a=5,b=1,c=1,d=3)
## Conditions initiales dans le vecteur yini
yini    <- c(x=4,y=3)
## Temps dans le vecteur times
maxt <- 10
times   <- seq(0,maxt,by=0.01)

##################################################################
#####  Calcule numérique d'une solution et représentation graphique
## Appel à la fonction lsoda et stockage des résultats dans le tableau out
out <- data.frame(lsoda(func= POPmod, y=yini, parms=pars, times=times))

## Représentation graphique dans le plan de phase
par(mar=c(4,4,2,2))
plot(out$x,out$y,type="l",lwd=2,xlab="x",ylab="y",cex.lab=1.8)
## Rajout des isoclines
abline(v=pars["d"]/pars["c"],h=pars["a"]/pars["b"])

## représentation graphique dans le plan (x,t)
ylims <- c(min(c(out$x,out$y)), max(c(out$x,out$y)))
plot(out$time,out$x,type="l",lwd=2,col=2,ylim=ylims,
     xlab="Temps",ylab="Effectifs des proies et des prédateurs")
points(out$time,out$y,type="l",lwd=2,col=3)
legend("topleft",c("x","y"),lwd=2,col=c(2,3),bty="n")
```